MATEMÁTICAS GRADO DÉCIMO
TERCERA PARTE

TEMA 1: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS EN EL PLANO CARTESIANO

CONCEPTO: Resolver un triángulo es determinar la medida de sus tres lados y sus tres ángulos, con esta información será posible determinar además la medida de su perímetro y establecer el área del triángulo.

Para resolver un triángulo que está ubicado en un plano cartesiano se comienza determinando la medida de sus lados con la fórmula de la distancia entre dos puntos (Teorema de Pitágoras). Luego podremos encontrar uno de sus ángulos usando el teorema del Coseno, el segundo ángulo por teorema del seno y el tercer ángulo con base en el teorema que nos dice que la suma de los tres ángulos internos de un triángulo siempre será igual a 180°.

EJEMPLO:

Resolver el triángulo cuyos vértices son: $P_1(-15{,}9), P_2(17{,}6)\ y\ P_3(13,-5)$. Calcular su perímetro y su área.

Primero, encontramos la medida de los tres lados.

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(-15-17)^2+(9-6)^2} = \sqrt{(-32)^2+3^2} = \sqrt{1.024+9} = \sqrt{1.033} \approx 32{,}14\,u$$

$$\overline{P_1P_3} = \sqrt{(-15-13)^2+\ (9-(-5))^2} = \sqrt{(-28)^2+(14)^2} = \sqrt{980} \approx 31{,}30\,u$$

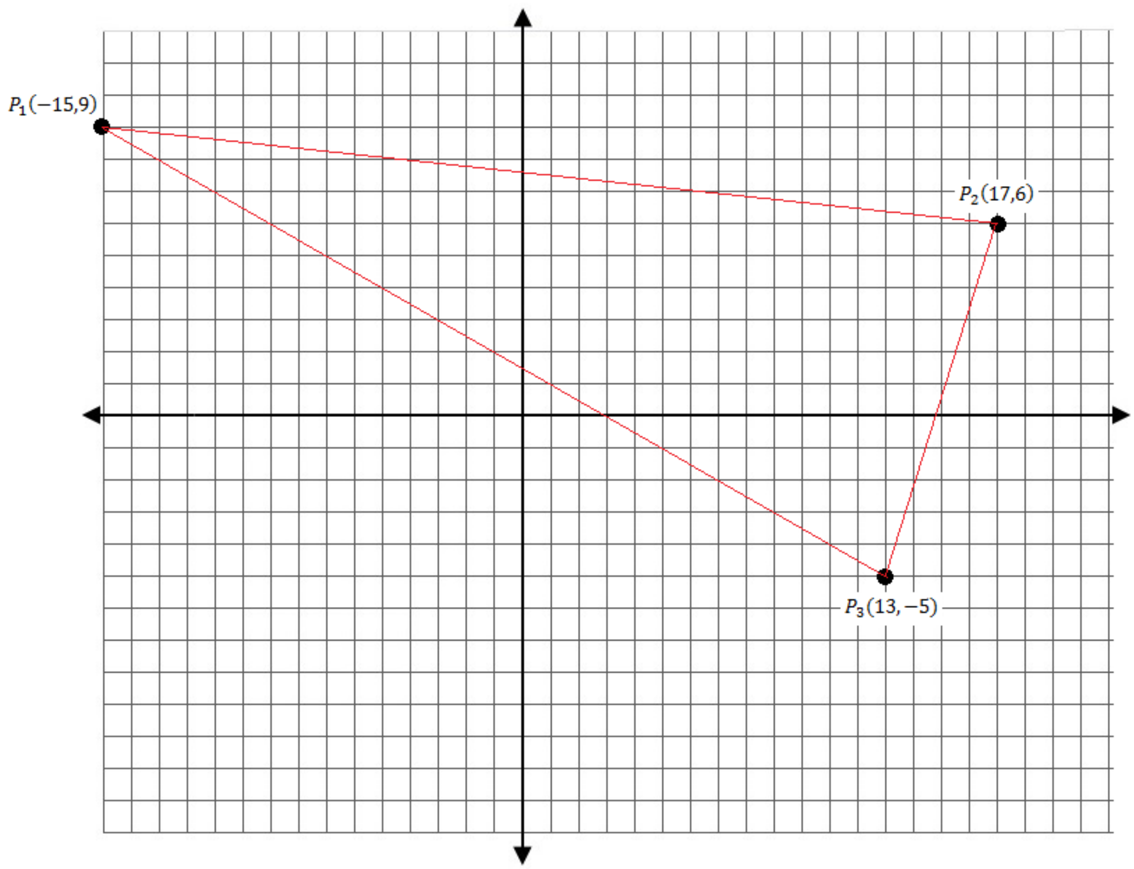
$$\overline{P_2P_3} = \sqrt{(17-13)^2+(6-(-5))^2} = \sqrt{(4)^2+(11)^2} = \sqrt{137} \approx 11{,}70\,u$$

Con la medida de los lados podemos calcular el perímetro del triángulo, para ello sumamos las tres medidas:

$$Perímetro = \overline{P_1P_2} + \overline{P_1P_3} + \overline{P_2P_3} \approx 32{,}14 + 31{,}30 + 11{,}70 \approx 75{,}14\,u$$

RECUERDA: las medidas de los tres lados fueron aproximadas pues todas las raíces eran inexactas (números racionales) por ello el perímetro también es aproximado.

El triángulo se traza en el plano cartesiano…



Podemos ahora aplicar la ley del coseno para determinar la medida de uno de los ángulos, en este ejemplo al ángulo que se forma en el punto 2 lo denominaremos “A”, la ley del coseno dice:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Al despejar queda:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Para nosotros a = $\overline{P_1P_3}$, al reemplazar en la fórmula se tendría la siguiente operación:

$$\cos A \approx \frac{(32{,}14)^2 + (11{,}70)^2 - (31{,}30)^2}{2(32{,}14)(11{,}70)} \approx 0{,}25$$

Cuando tenemos el coseno del primer ángulo determinamos su medida aplicando la función inversa del coseno (en la calculadora shift + coseno).

$$A \approx 75°21'8{,}72''$$

Para calcular el segundo ángulo podemos volver a usar la ley del coseno, pero resulta más fácil aplicar la ley del seno, la usaremos para determinar la medida del ángulo que se forma en el punto 1. La ley del seno sería:

$$\frac{\sin \measuredangle P_2}{\overline{P_1P_3}} = \frac{\sin \measuredangle P_1}{\overline{P_2P_3}}$$

Al reemplazar queda:

$$\frac{\sin 75°21'8{,}72"}{31{,}30} \approx \frac{\sin \measuredangle P_1}{11{,}70}$$

$$\sin \measuredangle P_1 \approx 0{,}36$$

Aplicamos nuevamente la inversa de la función trigonométrica para determinar la medida del ángulo (shift + seno)…

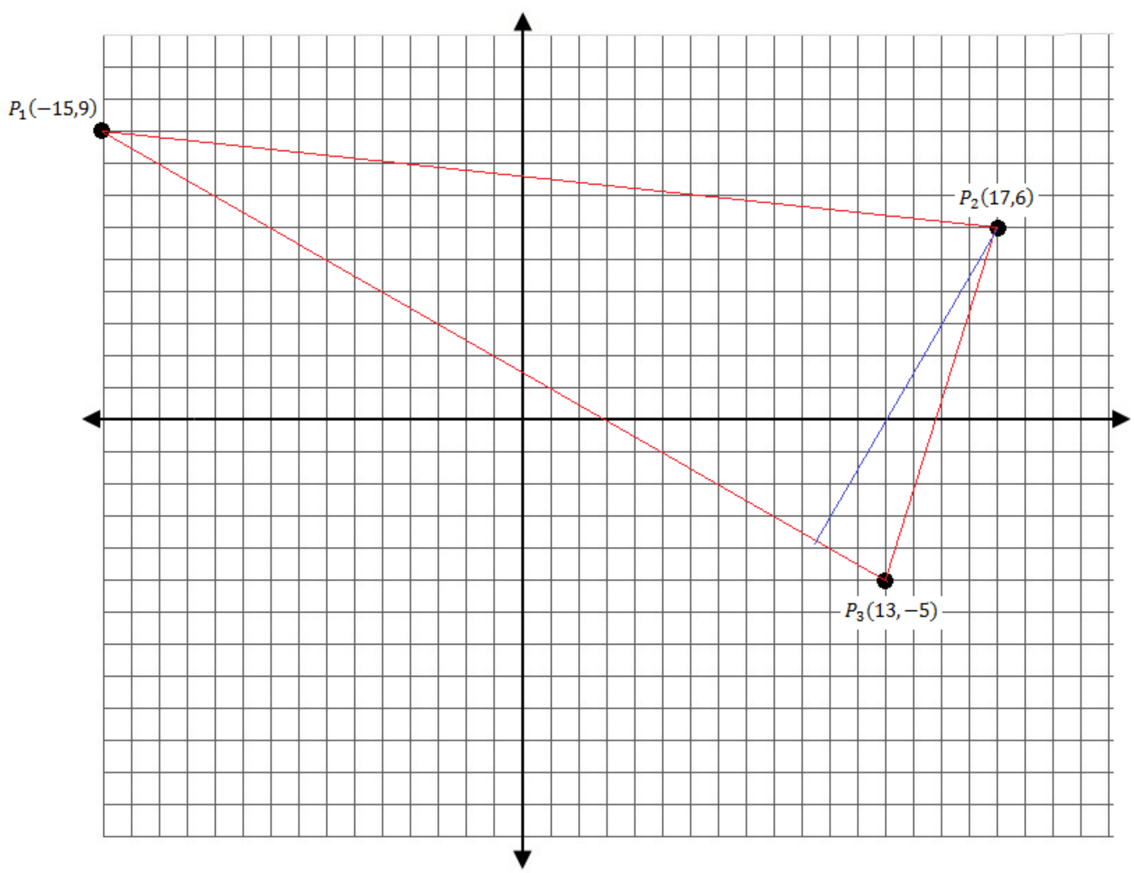
$$\measuredangle P_1 \approx 21°12'6{,}33"$$

Para el tercer ángulo recordemos que la suma de los tres ángulos internos de un triángulo siempre suman 180°, por tanto el tercer ángulo lo encontraremos restando a 180° las medidas de los ángulos en el punto 1 y el punto 2.

$$\measuredangle P_3 = 180° - \measuredangle P_1 - \measuredangle P_2$$

$$\measuredangle P_3 \approx 180° - 75°21'8{,}72" - 21°12'6{,}33" \approx 83°26'44{,}95"$$

Para calcular el área del triángulo necesitaremos determinar la medida de una de sus alturas (recuerda que altura es el segmento perpendicular que va desde uno de los vértices del triángulo a su lado opuesto), en nuestro caso trazaremos la altura desde el punto 2 (después la trazaremos desde otro de los vértices sólo para confirmar que el valor del área debe ser muy similar, no será exacto por la aproximación que se ha realizado tanto en la medida de los lados como en la de los ángulos).



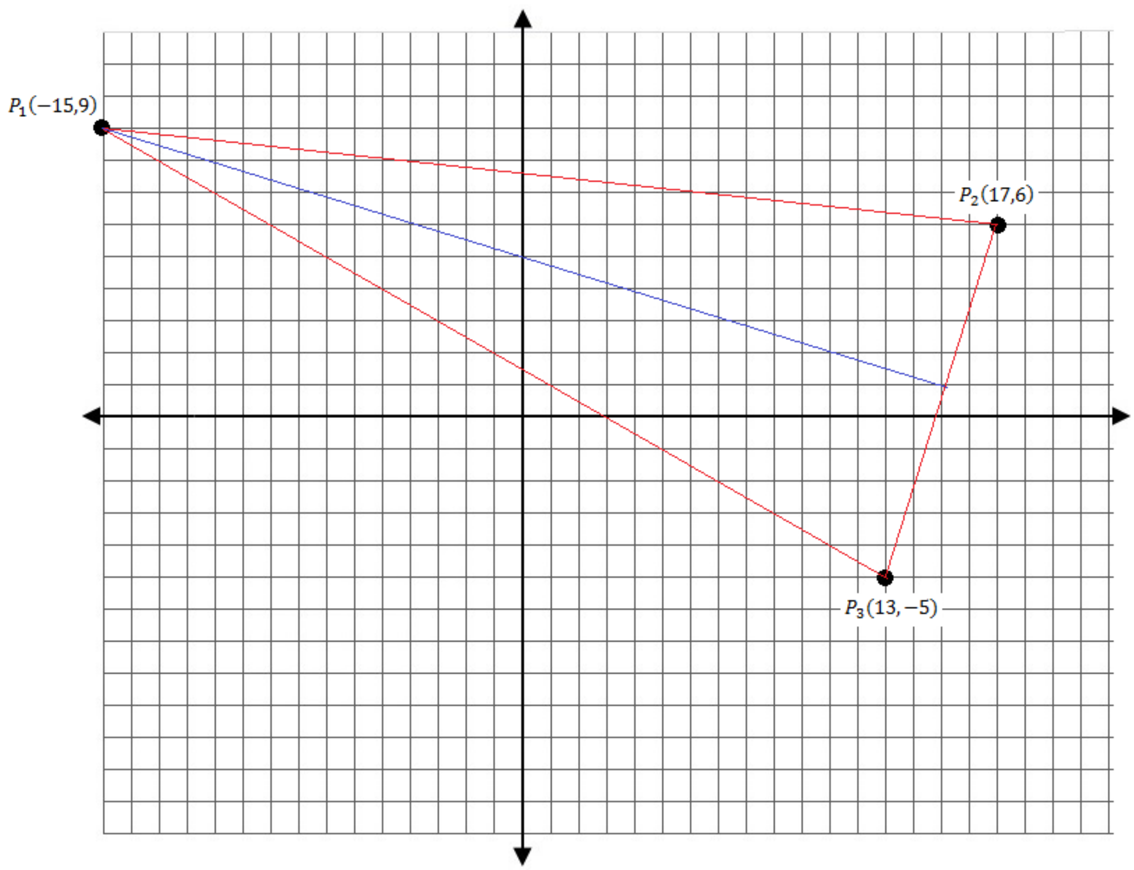
La línea azul corresponde a la altura del triángulo desde el punto 2 (h), para calcular su medida podemos usar una de las funciones trigonométricas básicas pues ya conocemos las medidas de los lados y ángulos del triángulo.

$$\sin\measuredangle P_3=\frac{h}{\overline{P_2P_3}}\rightarrow h=\sin\measuredangle P_3*\overline{P_2P_3}\ \rightarrow h\ \approx\ \sin 83°26'44{,}95"*11{,}70\ \rightarrow h\approx 11{,}62\,u$$

Ahora podemos calcular el área del triángulo: Base: $\overline{P_1P_3}\ \approx 31{,}30\,u$, Altura: $h\ \approx 11{,}62\,u$.

$$Área\ \approx\ \frac{31{,}30*11{,}62}{2}\rightarrow Área\ \approx 181{,}91\,u^2$$

Ahora, sólo para comprobar la teoría, calcularemos el área del mismo triángulo trazando su altura desde el punto 1.



Llamaremos a esta altura x, por funciones trigonométricas básicas sabemos que:

$$\sin\measuredangle P_2=\frac{x}{\overline{P_1P_2}}\ \rightarrow\ x=\ \sin\measuredangle P_2*\ \overline{P_1P_2}\rightarrow\ x\ \approx\ \sin 75°21'8{,}72"*32{,}14\ \rightarrow x\approx 31{,}10\,u$$

Si cambiamos el punto desde el cual trazamos la altura, cambiará también la base. Base: $\overline{P_2P_3}\ \approx 11{,}70\,u$, Altura: $x\ \approx 31{,}10\,u$.

$$Área\approx\frac{11{,}70*31{,}10}{2}\rightarrow Área\ \approx 181{,}91u^2$$

Con esto queda demostrado que el área del triángulo debe ser la misma sin importar cuál altura se decida trazar.

TALLER 1

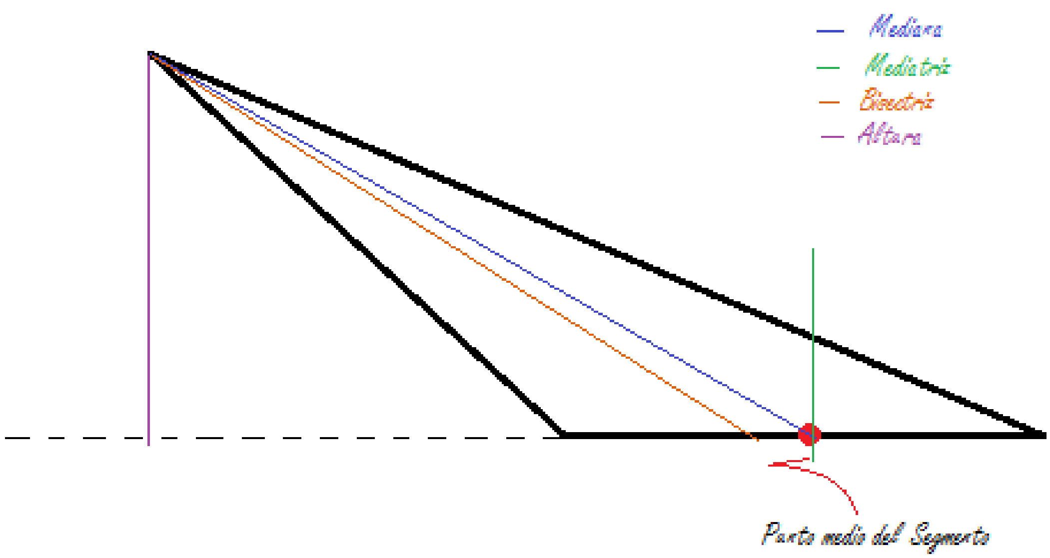
Trazar los triángulos en el plano cartesiano, resolverlos y calcular su perímetro y área.

1. $P_1(-15{,}19), P_2(-7,-10), P_3(12{,}4)$
2. $P_4(-12{,}11), P_5(8{,}6), P_6(2,-16)$
3. $P_7(19{,}17), P_8(1{,}3), P_9(-2,-13)$

TEMA 2: RECTAS NOTABLES DE LOS TRIÁNGULOS

CONCEPTO: Reciben el nombre de rectas notables de un triángulo aquellas que corresponden al trazado por puntos específicos del triángulo y que dan origen a los puntos notables del triángulo. Las rectas notables del triángulo son:

- ★ MEDIANAS: Segmentos que unen un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto.
- ★ MEDIATRICES: Son los segmentos que pasan por el punto medio de un lado del triángulo formando un ángulo recto (son perpendiculares al lado por el punto medio).
- ★ BISECTRICES: Recta o segmento que divide un ángulo en dos partes iguales.
- ★ ALTURAS: Como ya dijimos es el segmento que pasa por un vértice del triángulo y es perpendicular al lado opuesto o a su prolongación.



Para encontrar el punto medio de dos puntos en el plano cartesiano se aplica la siguiente fórmula:

$Conocidos\ P_1(x_1, y_1) \quad P_2(x_2, y_2), las\ coordenadas\ del\ punto\ medio\ las\ determinamos\ así$:

$$P_m\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

EJEMPLO:

$P_1(-15{,}9)\ y\ \ P_2(17,-13)$ … Las coordenadas del punto medio P_m, serán:

$$P_m\left(\frac{-15+17}{2},\frac{9-13}{2}\right) \rightarrow P_m\left(\frac{2}{2},\frac{-4}{2}\right) \rightarrow P_m(1,-2)$$

Las coordenadas no siempre darán como resultado valores enteros, en tal caso podemos expresar los valores como fracciones o como decimales.

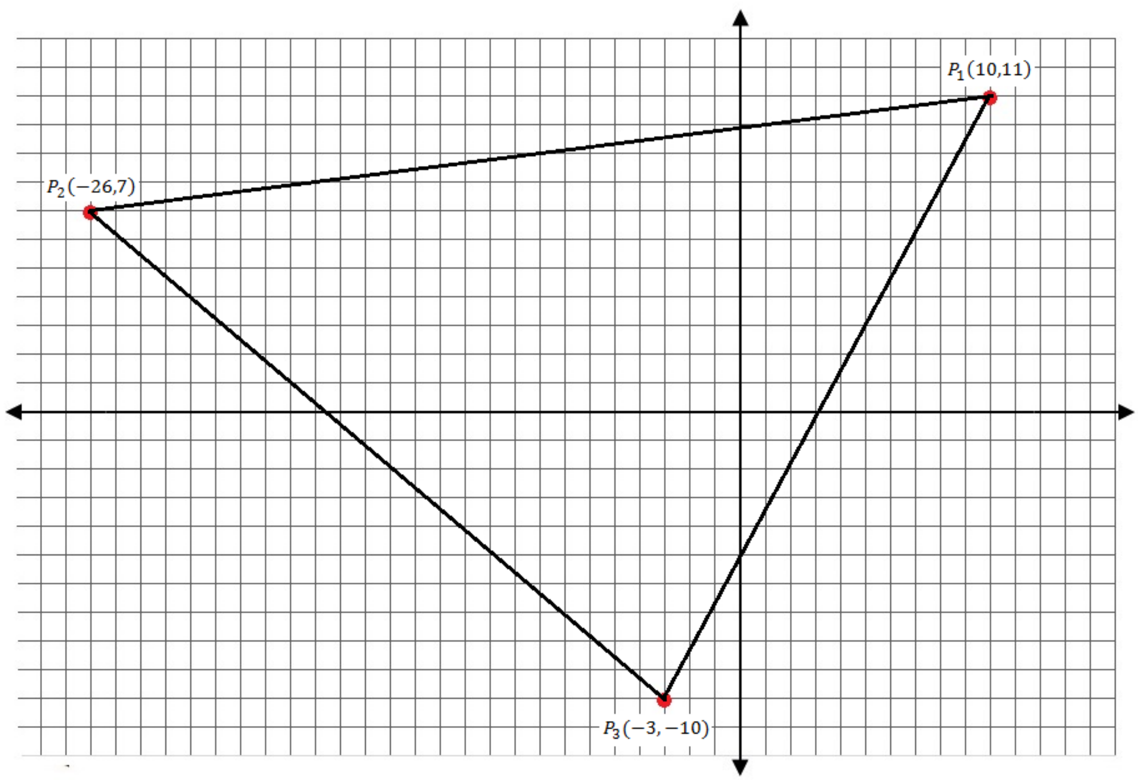
Cuando queremos determinar la ecuación de las rectas correspondientes a las medianas de un triángulo lo que hacemos es encontrar primero los puntos medios de cada lado, después procedemos a aplicar la ecuación general de la recta.

EJEMPLO 1:

Trazar el triángulo cuyas coordenadas están dadas por los puntos:

$$P_1(10,11), \qquad P_2(-26,7) \quad y \quad P_3(-3,-10)$$

Después encontrar la ecuación correspondiente a las medianas del triángulo.



Ya tenemos los puntos seleccionados en el plano y trazamos el triángulo, ahora para encontrar la ecuación de las rectas correspondientes a las medianas encontramos las coordenadas de los puntos medios de los tres lados:

$$P_4 = punto\ medio\ de\ los\ puntos\ P_1\ y\ P_2$$
$$P_5 = punto\ medio\ de\ los\ puntos\ P_2\ y\ P_3$$
$$P_6 = punto\ medio\ de\ los\ puntos\ P_1\ y\ P_3$$

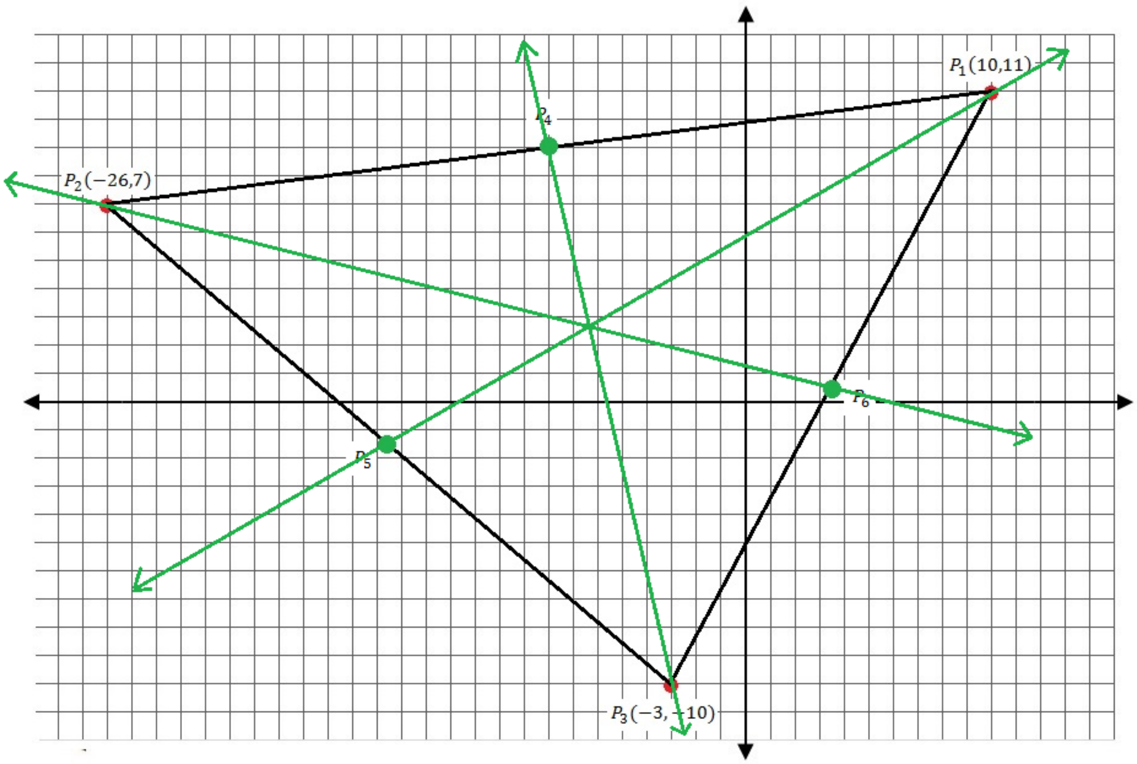
Aplicamos la fórmula de punto medio y tenemos:

$$P_4 = \left(\frac{10-26}{2},\frac{11+7}{2}\right) \rightarrow P_4 = \left(\frac{-16}{2},\frac{18}{2}\right) \rightarrow P_4(-8{,}9)$$

$$P_5 = \left(\frac{-26-3}{2}, \frac{7-10}{2}\right) \rightarrow P_5\left(\frac{-29}{2}, \frac{-3}{2}\right)$$

$$P_6 = \left(\frac{10-3}{2}, \frac{11-10}{2}\right) \rightarrow P_6\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Podemos ahora seleccionar los puntos medios en el plano cartesiano y trazar las tres medianas.



RECUERDA: El punto de intersección de las tres medianas se denomina baricentro.

Ahora para determinar la ecuación de las medianas simplemente tomamos cada vértice y el punto medio del lado opuesto…

MEDIANA 1: $P_1(10{,}11)\ y\ P_5\left(\frac{-29}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{\frac{-3}{2} - 11}{\frac{-29}{2} - 10} \rightarrow m = \frac{25}{49}$$

Para la ecuación de la recta aplicamos la fórmula: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Tomamos las coordenadas de uno de los puntos y reemplazamos:

$$y - 11 = \frac{25}{49}(x - 10)$$

Después de resolver, la ecuación de la recta queda:

$$y = \frac{25}{49}x + \frac{289}{49}\ (mediana\ 1)$$

MEDIANA 2: $P_2(-26{,}7)\ y\ \ P_6\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$m = \frac{\frac{1}{2} - 7}{\frac{7}{2} + 26} \rightarrow m = -\frac{13}{59}$$

Para la ecuación de la recta reemplazamos y queda:

$$y - 7 = -\frac{13}{59}(x + 26)$$

$$y = -\frac{13}{59}x + \frac{75}{59}\ \color{red}{(mediana\ 2)}$$

MEDIANA 3: $P_3(-3,-10)\ y\ \ P_4(-8,9)$

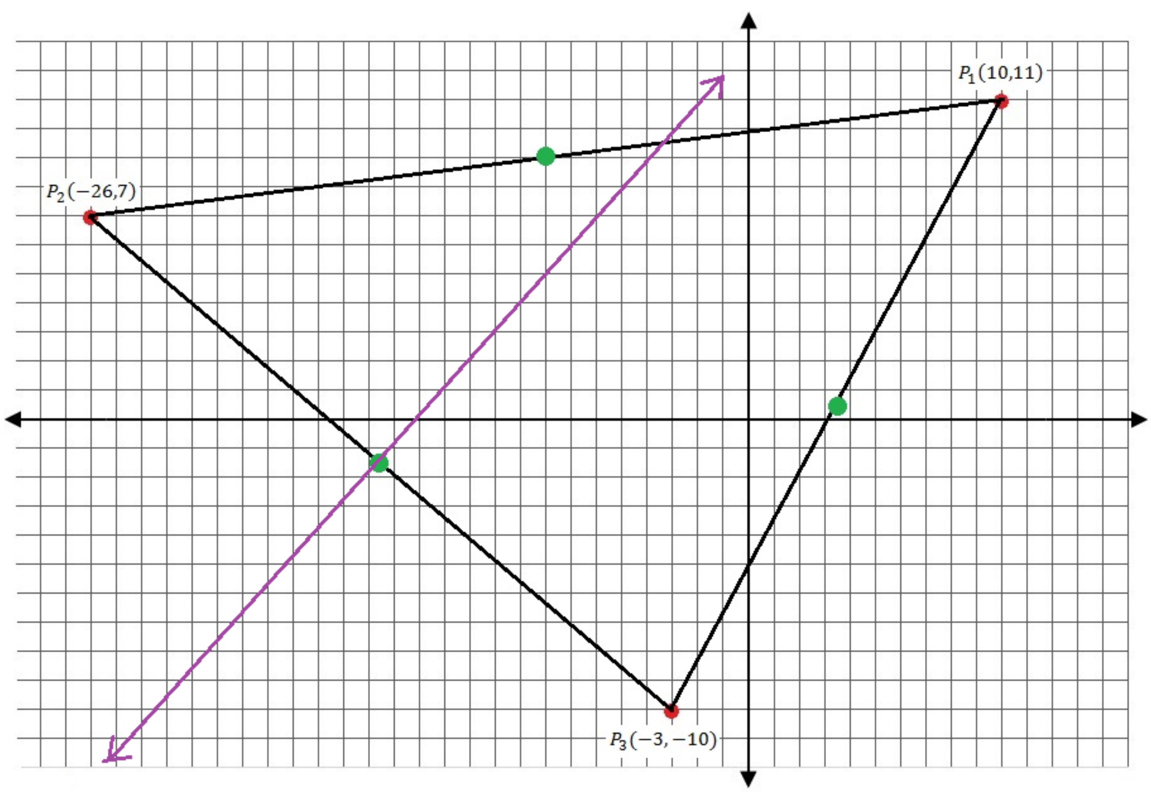
$$m = \frac{9 + 10}{-8 + 3} \rightarrow m = -\frac{19}{5}$$

$$y + 10 = -\frac{19}{5}(x + 3)$$

$$y = -\frac{19}{5}x - \frac{107}{5}\ \color{red}{(mediana\ 3)}$$

EJEMPLO 2:

En el triángulo anterior encontrar la recta que corresponde a la mediatriz del lado $\overline{P_2P_3}$.



Por definición la mediatriz pasará por el punto medio del segmento $\overline{P_2P_3}$ formando un ángulo de 90° (perpendicular a $\overline{P_2P_3}$).

Para determinar la ecuación de esta recta calculamos primero la pendiente de la recta $\overleftrightarrow{P_2P_3}$.

$$m = \frac{-10-7}{-3+26} \rightarrow m = -\frac{17}{23}$$

Como las rectas son perpendiculares, la pendiente de la mediatriz es igual al inverso multiplicativo de la pendiente de la recta $\overleftrightarrow{P_2P_3}$ y con signo contrario, es decir:

$$m_{mediatriz} = \frac{23}{17}$$

Ya podemos calcular la ecuación de la mediatriz usando la pendiente que acabamos de determinar y el punto medio de $\overline{P_2P_3}$.

$$y + \frac{3}{2} = \frac{23}{17}(x + \frac{29}{2})$$

$$y = \frac{23}{17}x + \frac{308}{17} (mediatriz\ del\ segmento\ \overline{P_2P_3})$$

TALLER 2

Trazar el triángulo que corresponde a las coordenadas indicadas, encontrar las ecuaciones de sus tres medianas y sus tres mediatrices (trazar en el plano las medianas y las mediatrices, usar diferentes colores).

1. $P_1(-18,15), P_2(13,12)\ y\ P_3(8,-11)$
2. $P_4(-11,-15), P_5(-9,17)\ y\ P_6(7,20)$

TEMA 3: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Estudia el documento que se encuentra en el siguiente enlace y resuelve la mitad de los enunciados planteados en los ejercicios 14, 15 y 16.

http://www.fic.umich.mx/~lcastro/identidades%20trigonometricas.pdf